7.5. Колебательные системы

7.5.1. Пружина жесткостью k одним концом присоединена к оси колеса массой m, которое может катиться без проскальзывания, а другим прикреплена к стене (рис. 7.5.1). Определите частоту колебаний системы. Масса колеса равномерно распределена по ободу.

7.5.2. Два одинаковых тела, соединенных легкой пружиной жесткостью $k = 500$ Н/м, лежат на гладком горизонтальном столе. Найдите амплитуды возникающих гармонических колебаний тел, если пружине сообщить энергию $E = 0{,}1$ Дж.

7.5.3. Шарик, подвешенный между двумя невесомыми пружинами жесткостями $k_1 = 20$ Н/м и $k_2 = 10$ Н/м так, как показано на рисунке 7.5.2, имеет частоту колебаний такую же, что и математический маятник длиной $l = 10$ см. Определите массу шарика.

7.5.4. На гладком горизонтальном столе лежит грузик массой m, прикрепленный горизонтальными пружинами к стенкам (рис. 7.5.3). Жесткость одной пружины равна k, а другой в 2 раза больше. Если грузик несколько сместить вдоль линии пружин, он начнет колебаться. Найдите период этих колебаний.

7.5.5. Шарик массой $m = 0{,}5$ кг закреплен двумя недеформированными одинаковыми пружинами жесткостью $k = 500$ Н/м между вертикальными стойками на доске массой $M = 2$ кг, лежащей на гладком столе (рис. 7.5.4). Удерживая доску на месте, шарик смещают вдоль линии пружин из положения равновесия на $x_0 = 2$ см и отпускают. Определите частоту колебаний шарика и амплитуду относительно стола, считая их гармоническими.

7.5.6. На идеально гладкой горизонтальной плоскости расположен брусок массой $M = 1$ кг, скрепленный с пружинами, жесткость каждой из которых $k = 30$ Н/м (рис. 7.5.5). На бруске лежит шайба массой $m = 0{,}5$ кг. Система брусок—шайба приводится в колебательное движение. Определите максимальную амплитуду колебаний, при которой система будет двигаться как единое целое, т. е. без проскальзывания шайбы по бруску. Коэффициент трения скольжения между бруском и шайбой $\mu = 0{,}4$.

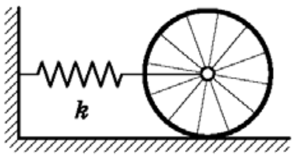

Рис. 7.5.1

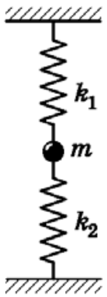

Рис. 7.5.2

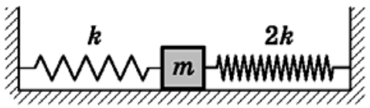

Рис. 7.5.3

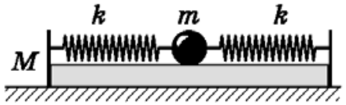

Рис. 7.5.4

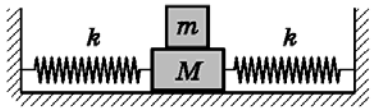

Рис. 7.5.5

7.5.7. Брусок за края подвешен к потолку на двух одинаковых пружинах жесткостью k каждая и притянут к полу прикрепленной к его центру пружиной жесткостью $2k$ (рис. 7.5.6). Выведенный из положения равновесия, он начинает совершать колебания в вертикальной плоскости с периодом T. Чему равна масса бруска?

• **7.5.8.** Грузы массами m и $3m$ висят на нити, перекинутой через неподвижный блок, причем каждый из них присоединен к полу с помощью вертикальной пружины жесткостью k (рис. 7.5.7). В положении равновесия обе пружины растянуты. Систему вывели из положения равновесия, сообщив грузу m направленную вниз вертикальную скорость υ_0. Найдите амплитуду и период возникших колебаний грузов.

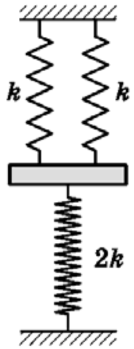

Рис. 7.5.6

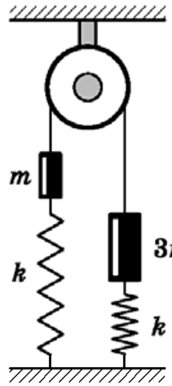

Рис. 7.5.7

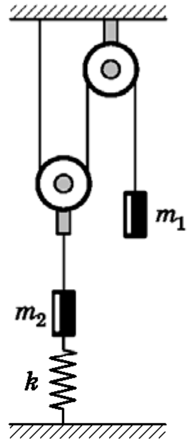

Рис. 7.5.8

• **7.5.9.** Груз массой m_1 подвешен к потолку с помощью нити, перекинутой через неподвижный и подвижный блоки. Груз массой m_2 соединен нитью с подвижным блоком и пружиной жесткостью k с землей (рис. 7.5.8). В положении равновесия пружина растянута. Груз m_1 смещают из положения равновесия вниз на расстояние A и отпускают. Найдите период возникающих колебаний и максимальную скорость колеблющихся грузов.

7.5.10. К оси подвижного легкого блока, подвешенного на нити AB, соединенной с двумя пружинами жесткостями $k_1 = 10$ Н/м и

$k_2 = 20$ Н/м, прикреплено тело массой $m = 100$ г так, как показано на рисунке 7.5.9. Блок может свободно скользить по нити. Пренебрегая трением в оси блока, определите период малых колебаний тела.

• **7.5.11.** Тело массой $m = 1$ кг и тело массой $M = 4$ кг соединены между собой пружиной, как показано на рисунке 7.5.10. Тело массой m совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 1{,}6$ см и циклической частотой $\omega = 25$ рад/с. Пренебрегая массой пружины, найдите отношение наибольшей и наименьшей сил давления этой системы на плоскость стола. При каком значении амплитуды колебаний тело массой M оторвется от стола?

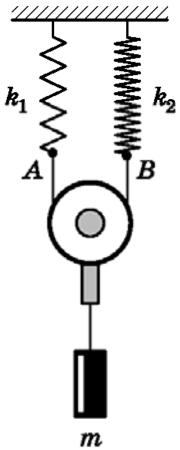

Рис. 7.5.9

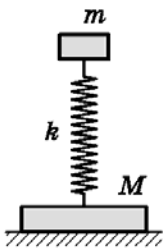

Рис. 7.5.10

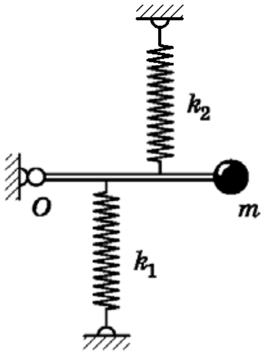

Рис. 7.5.11

• **7.5.12.** Жестко соединенная конструкция из легкого стержня и небольшого по размерам шарика массой m может совершать колебания под действием двух пружин жесткостями k_1 и k_2 каждая вокруг вертикальной оси O по гладкой поверхности стола (рис. 7.5.11). Пружины легкие, точки крепления их к стержню делят его на три равные части. В положении равновесия оси пружин перпендикулярны стержню, и пружина жесткостью k_1 растянута на величину l_1. Найдите:

1) деформацию второй пружины в положении равновесия;
2) период малых колебаний системы.

• **7.5.13.** Внутри гладкой сферической поверхности радиусом $R = 10$ см находится небольшой шарик массой m =10 г (рис. 7.5.12), который совершает гармонические колебания. Наибольшее смещение шарика из положения равновесия, измеренное вдоль поверхности сферы, равно $s_{max} = 5$ мм. Чему равна полная энергия E колебаний шарика?

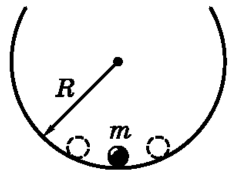

Рис. 7.5.12

7.5.14. С края гладкой полусферы соскальзывает небольшое тело массой $m_1 = 50$ г и абсолютно неупруго ударяет тело массой $m_2 = 200$ г, лежащее на дне полусферы (рис. 7.5.13). Найдите угловую амплитуду колебаний тел после соударения.

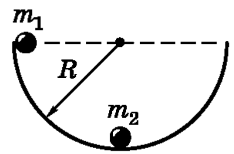

Рис. 7.5.13

7.5.15. Предположим, что по одному из диаметров Земли просверлили канал. Принимая Землю за однородный шар плотностью $\rho = 5{,}5 \times \times 10^3$ кг/м^3, найдите время движения тела от поверхности Земли до ее центра.

7.5.16. В пустом пространстве вдоль одной прямой на расстоянии a друг от друга расположены три материальные точки. Массы крайних точек равны M (каждая) и намного превышают массу средней точки. Центральную точку смещают на расстояние, много меньшее a, в направлении, перпендикулярном линии, соединяющей крайние точки, после чего она начинает колебаться. Найдите период этих колебаний.

• **7.5.17.** На бруске массой $M = 100$ г, находящемся на гладкой горизонтальной плоскости, вертикально установлен легкий стержень, к которому привязана нить длиной $l = 25$ см с грузом массой $m = 50$ г (рис. 7.5.14). Нить с грузом отклоняют на небольшой угол от вертикали и отпускают. Определите период возникающих колебаний груза, считая их гармоническими.

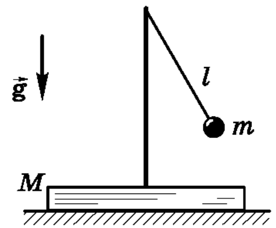

Рис. 7.5.14

7.5.18. Посередине натянутой струны закреплен небольшой грузик массой $m = 0{,}1$ кг. Длина струны $l = 2$ м. Частота малых колебаний грузика $\nu = 10$ Гц. Найдите силу натяжения струны. Силу тяжести не учитывать.

7.5.19. Однородный стержень положили на два быстро вращающихся блока, как показано на рисунке 7.5.15. Расстояние между осями блоков $l = 20$ см, коэффициент трения между стержнем и блоками $\mu = 0{,}18$. Покажите, что стержень будет совершать продольные гармонические колебания, и найдите их период.

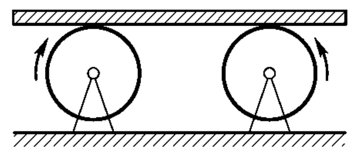

Рис. 7.5.15

• **7.5.20.** Ареометр массой $m = 0{,}2$ кг плавает в жидкости. Если погрузить его немного в жидкость и отпустить, то он начнет совершать колебания с периодом $T = 3{,}4$ с. Считая колебания незатухающими, найдите плотность ρ жидкости, в которой плавает ареометр. Диаметр вертикальной цилиндрической трубки ареометра $d = 1$ см.

7.5.21. Набухшее бревно, сечение которого постоянно по всей длине, плавает вертикально в воде так, что над водой находится лишь малая по сравнению с длиной часть бревна. Период малых вертикальных колебаний бревна $T = 2$ с. Определите длину l бревна. Сопротивление среды не учитывать.

7.5.22. Определите период малых колебаний ртути массой $m = 121$ г, находящейся в V-образной трубке. Площадь сечения канала трубки $S = 0{,}3$ см^2.

• **7.5.23.** В воде плавает льдина, имеющая форму куба со стороной $a = 50$ см. Льдину погружают на небольшую глубину (не потопляя ее полностью) и отпускают, в результате чего она начинает совершать гармонические колебания с амплитудой $A = 5$ см. Определите полную энергию колебаний льдины. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3. Трение льдины о воду не учитывать.

Ответы:

7.5.1. $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{2m}}$.

Указание. Учесть, что каждая точка обода одновременно участвует в двух движениях: поступательном вместе с осью и вращательном относительно этой оси.

7.5.2. $A_1 = A_2 = \sqrt{\dfrac{E}{2k}} \approx 1$ см.

7.5.3. $m = \dfrac{l(k_1 + k_2)}{g} \approx 300$ г.

7.5.4. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{3k}}$.

7.5.5. $\omega = \sqrt{\dfrac{2k(m+M)}{mM}} = 50$ с$^{-1}$; $A = \dfrac{Mx_0}{m+M} \approx 16$ см.

7.5.6. $A \leqslant 0{,}1$ м.

7.5.7. $m = \dfrac{kT^2}{\pi^2}$.

7.5.10. $T = \pi\sqrt{\dfrac{m(k_1+k_2)}{k_1k_2}} \approx 0{,}38$ с.

7.5.14. $\alpha_0 = \arccos\left(1 - \dfrac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\right) \approx 3{,}3°$.

7.5.15. $t = \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{3\pi}{G\rho}} \approx 21$ мин, где G — гравитационная постоянная.

7.5.16. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{2GM}}$.

7.5.18. $F = \pi^2 m l \nu^2 = 197{,}4$ Н.

7.5.19. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{2\mu g}} \approx 1{,}5$ с.

7.5.21. $l = \dfrac{gT^2}{4\pi^2} = 1$ м.

7.5.22. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2\rho g S}} \approx 0{,}77$ с, где ρ — плотность ртути.