**7 класс**

**7.1.** Найдите наибольшее отношение трехзначного числа к сумме его цифр.

**7.2.** За два года завод снизил выпуск продукции на 51 %. При этом каждый год объем выпускаемой продукции снижался на одно и то же количество процентов. На сколько?

**7.3.** У некоторого четырехугольника измерили длины четырех сторон и одной диагонали. Получили значения 10 см, 20 см, 28 см, 50 см, 75 см. Какой результат получили при измерении диагонали?

**7.4.** Фигура на рисунке составлена из шести квадратов. У самого маленького сторона равна 1. Найдите сторону левого нижнего квадрата.

**7.5.** У Веры есть несколько конфет не обязательно одинаковой стоимости. Известно, что конфеты можно разложить на две кучки так, что суммарная стоимость конфет в одной кучке будет вдвое больше, чем в другой. Также их можно разложить на две кучки так, что суммарная стоимость конфет в одной кучке будет втрое больше, чем в другой. Какое наименьшее число конфет могло быть у Веры?

**8 класс**

**8.1.** У числа *А* подсчитали сумму цифр и получили число *Б*. У числа *Б* подсчитали сумму цифр и получили число *В*. Когда подсчитали сумму цифр у числа *В*, то и получили число 2. Числа *А*, *Б*, *В* и 2 все различны. Найдите наименьшее возможное число *А*.

**8.2.** Число  записали бесконечной десятичной дробью. Затем стёрли 2021-ю цифру после запятой. Выясните, полученная бесконечная десятичная дробь больше или меньше числа .

**8.3.** На плоскости отметили пять точек: *A*, *B*, *C*, *D*, *O*. Оказалось, что углы *AOB*, *BOC*, *COD* равны между собой, а угол *AOD* втрое меньше каждого из них (все углы меньше развернутого). Какой может быть величина угла *AOD*? Постарайтесь перечислить все возможные варианты.

**8.4.** Найдите наименьшее число, которое начинается с 2021 и делится без остатка на все однозначные числа.

**8.5.** На плоскости отмечено 4 точки. Докажите, что их можно распределить в две группы, которые друг от друга нельзя отделить никакой прямой.

**9 класс**

**9.1.** Числа от 1 до 2021 распределяют в несколько групп так, чтобы в одной группе не оказалось двух чисел, из которых одно вдвое больше другого. Какое наибольшее количество чисел может оказаться в одной группе?

**9.2.** Корнем квадратного трехчлена *ax*2 + *bx* + *c* являются числа  и . Докажите, что один из корней этого трехчлена по модулю равен 1.

**9.3.** В треугольнике *АВС* две высоты не меньше сторон, к которым они проведены. Найдите углы этого треугольника.

**9.4.** Докажите, что если число *m*2 + 9*mn* + *n*2 при целых *m* и *n* делится на 11, то на 11 делится и число *m*2 – *n*2.

**9.5.** Футбольный мяч сшит из белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый шестиугольник сшит по трем своим сторонам с тремя белыми и тремя черными многоугольниками, а каждый пятиугольник — с пятью белыми многоугольниками. Всего использовано 32 многоугольника. Сколько среди них черных?

**7 класс**

**7.1.** Найдите наибольшее отношение трехзначного числа к сумме его цифр.

Решение. Имеем:  =  = 100 – . Наибольшее значение последнее выражение принимает при *b* = *c* = 0.

Ответ. 100.

**7.2.** За два года завод снизил выпуск продукции на 51 %. При этом каждый год объем выпускаемой продукции снижался на одно и то же количество процентов. На сколько?

Решение. Пусть два года назад завод выпускал *a* единиц продукции, а ежегодное снижение выпуска составляло *х* %. Тогда после первого года снижения завод выпускал , т. е.  = *b* единиц, а после второго года — выпускал *b*, т. е.  единиц. Так как по условию двухгодичное снижение составило 51 %, то после второго года завод выпустил , т. е.  единиц. Поэтому = . Получаем:  = ,  = ,  =  и *х* = 30.

Ответ. 30 %.

**7.3.** У некоторого четырехугольника измерили длины четырех сторон и одной диагонали. Получили значения 10 см, 20 см, 28 см, 50 см, 75 см. Какой результат получили при измерении диагонали?

Решение. После проведения диагонали в четырехугольнике получается два треугольника. В треугольнике длина большей стороны меньше суммы длин двух других сторон. Поэтому в треугольнике со стороной 75 см две другие стороны имеют длины 50 см и 28 см. Из трех значений 75 см, 50 см, 28 см одно, то, которое является длиной диагонали, должно быть длиной стороны другого треугольника и быть меньше суммы 10 см + 20 см. Таким является значение 28 см.

Ответ. 28 см.

**7.4.** Фигура на рисунке составлена из шести квадратов. У самого маленького сторона равна 1. Найдите сторону левого нижнего квадрата.

Решение. Пусть *а* — сторона среднего квадрата снизу. Тогда *а* + 1 — сторона правого квадрата снизу, *а* + 2 — сторона правого квадрата сверху, *а* + 3 — сторона левого квадрата сверху и (*а* + 3) – (*а* – 1), т. е. 4 — сторона левого квадрата снизу.

Ответ. 4.

**7.5.** У Веры есть несколько конфет не обязательно одинаковой стоимости. Известно, что конфеты можно разложить на две кучки так, что суммарная стоимость конфет в одной кучке будет вдвое больше, чем в другой. Также их можно разложить на две кучки так, что суммарная стоимость конфет в одной кучке будет втрое больше, чем в другой. Какое наименьшее число конфет могло быть у Веры?

Ответ. 3. Например, 8 коп, 3 коп и 1 коп.

**8 класс**

**8.1.** У числа *А* подсчитали сумму цифр и получили число *Б*. У числа *Б* подсчитали сумму цифр и получили число *В*. Когда подсчитали сумму цифр у числа *В*, то и получили число 2. Числа *А*, *Б*, *В* и 2 все различны. Найдите наименьшее возможное число *А*.

Решение. Наименьшее число *В*, не равное 2, — это число 11. Тогда нименьшим из чисел Б является число 29, а наименьшим из чисел А — число 2999.

Ответ. 2999.

**8.2.** Число  записали бесконечной десятичной дробью. Затем стёрли 2021-ю цифру после запятой. Выясните, полученная бесконечная десятичная дробь больше или меньше числа .

Решение. Делением находим, что  = 0, 0(238095). Так как 2021 – 1 – 6 ∙ 336 = 4, то стёрли 4-ую цифру в периоде, т. е цифру 0. Поэтому полученная бесконечная десятичная дробь больше исходной.

Ответ. больше.

**8.3.** На плоскости отметили пять точек: *A*, *B*, *C*, *D*, *O*. Оказалось, что углы *AOB*, *BOC*, *COD* равны между собой, а угол *AOD* втрое меньше каждого из них (все углы меньше развернутого). Какой может быть величина угла *AOD*? Постарайтесь перечислить все возможные варианты.

Решение. Если точки *A*, *O*, *B* отмечены на одной прямой, то при указанных условиях все углы имеют величину 0º.

Пусть теперь точки *A*, *O*, *B* не лежат на одной прямой и величина угла *AOD* равна *х*. Тогда величина каждого из углов *AOB*, *BOC*, *COD* равна 3*х*. Указанные в задаче условия реализуются только тогда, когда сумма трех одинаковых углов отличается от полного угла на угол *AOD*.

Если 3 ∙ 3*х* = 360 – *х*, то *х* = 45. А если 3 ∙ 3*х* = 360 + *х*, то *х* = 36.

Ответ. 0 º, 45 º, 36º.

**8.4.** Найдите наименьшее число, которое начинается с 2021 и делится без остатка на все однозначные числа.

Решение. Наименьшее из чисел, которые делятся без остатка на все однозначные числа — это число 2520. Поэтому искомое число должно оканчиваться цифрой 0, А число десятков в этом числе должно делиться на 252. Находим, что 2021 = 252 ∙ 8 + 5, и 202104 = 252 ∙ 802. Это число наименьшее, поскольку504 — наименьшее число, которое начинается с цифры 5 и делится на 252 без остатка. Поэтому искомое число — 2021040

Ответ. 2021040.

**8.5.** На плоскости отмечено 4 точки. Докажите, что их можно распределить в две группы, которые друг от друга нельзя отделить никакой прямой.

Решение. Если отмеченные точки — вершины выпуклого четырехугольника, то в каждую группу включим две диагональные точки. Если же отмеченные точки — вершины невыпуклого четырехугольника, то одну группу образуем из одной точки, которая лежит либо между какими-то двумя, либо внутри треугольника с вершинами в остальных точках

**9 класс**

**9.1.** Числа от 1 до 2021 распределяют в несколько групп так, чтобы в одной группе не оказалось двух чисел, из которых одно вдвое больше другого. Какое наибольшее количество чисел может оказаться в одной группе?

Решение. В одну группу поместим все нечетные числа (их 1011), все числа, кратные 4 и не кратные 8 (их 505 – 252), все числа, кратные 16 и не кратные 32 (их 126 – 63), все числа, кратные 64 и не кратные 128 (их 31 – 15), все числа, кратные 256 и не кратные 512 (их 7 – 3) и все числа, кратные 1024 (такое число одно). Все остальные числа поместим во вторую группу. В первой группе будет всего 1011 + 253 + 63 + 16 + 4 + 1 чисел, т. е. 1348 чисел. Больне чисел в одну группу поместить нельзя.

Ответ. 1348.

**9.2.** Корнем квадратного трехчлена *ax*2 + *bx* + *c* являются числа  и . Докажите, что один из корней этого трехчлена по модулю равен 1.

Решение. По теореме Виета  ∙  = , т. е. (–*b*)2 – (*a* – *c*)2 = 4*ac*, т. е. *b*2 = (*a* + *c*)2 = 0. Если *b* = *a* + *c*, то  =  = –1. Если же –*b* = *a* + *c*, то  =  = 1.

**9.3.** В треугольнике *АВС* две высоты не меньше сторон, к которым они проведены. Найдите углы этого треугольника.

Решение. Пусть из вершины *А* проведена высота длиной *ha* к стороне длиной *а*, а из вершины *В* проведена высота длиной *hb* к стороне длиной *b*. По условию *ha* *а*, *hb* *b*. А поскольку отрезок перпендикуляра, проведенного из данной точки к данной прямой, является кратчайшим из всех отрезков, соединяющих данную точку с этой прямой, то *ha* *b*, *hb* *а*. Тогда *аha* *аb*, *bhb* *аb* и, учитывая условие, *bha* *аb*, *аhb* *аb*. Значит, *bha* *аb* *аha*, *аhb* *аb* *bhb*, *b* *а*, *а* *b* и *а* = *b.* Теперь условие можно записать так: *ha* *b*, *hb* *а*. Это возможно только тогда, когда *ha* = *b* = *а* = *hb*, т. е. когда стороны *АС* и *ВС* равны и сами являются высотами. Значит, треугольник *АВС* является равнобедренным и прямоугольным.

Ответ. 90 º, 45 º, 45º.

**9.4.** Докажите, что если число *m*2 + 9*mn* + *n*2 при целых *m* и *n* делится на 11, то на 11 делится и число *m*2 – *n*2.

Решение. Если на 11 делится число *m*2 + 9*mn* + *n*2, то делится и число *m*2 + 9*mn* + *n*2 – 11*mn*, т. е число (*m* – *n*)2, а, значит, и число *m* – *n*. Но в этом случае на 11 делится и произведение (*m* – *n*) (*m* + *n*), т. е. число *m*2 – *n*2.

**9.5.** Футбольный мяч сшит из белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый шестиугольник сшит по трем своим сторонам с тремя белыми и тремя черными многоугольниками, а каждый пятиугольник — с пятью белыми многоугольниками. Всего использовано 32 многоугольника. Сколько среди них черных?

Решение. Пусть использовано *х* черных многоугольников и *у* белых. Чтобы из одного черного многоугольника перейти в соседний белый есть 5 возможностей, а всего таких переходов — 5*х*. Чтобы из одного белого многоугольника перейти в соседний черный есть 3 возможности, а всего таких переходов — 3*у*. Но 5*х* = 3*у*. Значит *у* = *х* и, учитывая, что *х* + *у* = 32, получаем, что *х* + *х* =32, откуда *х* = 12.

Ответ. 12.